

Control de Lyapunov para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil con ruedas

Lyapunov control for tracking the trajectories of a wheeled mobile robot



- © Carlos Alberto Mora García: Universidad Estatal Península de Santa Elena, Ingeniero en electrónica y Automatización,
<https://orcid.org/0000-0003-3787-5807>
- © Junior Rafael Figueroa Olmedo: Universidad Estatal Península de Santa Elena, Máster Universitario en Inteligencia Artificial para el Sector de la Energía y las Infraestructuras,
<https://orcid.org/0000-0001-8498-6601>
Autor de correspondencia: albertomoragarcia9@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.64424/rcu512026105>

Recibido: 19 de febrero 2026
Aprobado: 2 de junio 2026
Publicado: 19 de junio 2026

Resumen:

El presente trabajo abordó el diseño e implementación de un controlador de Lyapunov en dos variantes, clásico y periódico, aplicado al seguimiento de trayectorias en un robot diferencial mBot Neo. Inicialmente, los algoritmos fueron validados mediante simulaciones en Matlab, para luego ser adaptados al lenguaje Python dentro del entorno mBlock y probados en escenarios reales. Los resultados demostraron que ambos controladores mantienen una concordancia cercana entre los tiempos simulados y reales, lo que confirma la viabilidad práctica de la propuesta. En cuanto al desempeño, las métricas de error evidencian que el controlador clásico ofrece mayor estabilidad y consistencia, especialmente en trayectorias complejas como Lissajous y cardioides, mientras que el controlador periódico muestra un comportamiento más variable. En general, ambos esquemas de control resultan eficientes, pero la versión clásica se perfila como la más robusta, consolidando criterios sólidos para la selección de estrategias de control en aplicaciones que requieren precisión y confiabilidad.

Palabras clave: Lyapunov, móvil, robot, trayectoria

Abstract:

This work addressed the design and implementation of a Lyapunov controller in two variants, classical and periodic, applied to trajectory tracking in an mBot Neo differential robot. Initially, the algorithms were validated through MATLAB simulations, then adapted to the Python language within the mBlock environment and tested in real-life scenarios. The results demonstrated that both controllers maintain close agreement between simulated and actual times, confirming the practical viability of the proposal. Regarding performance, error metrics show that the classical controller offers greater stability and consistency, especially in complex trajectories such as Lissajous and cardioid trajectories, while the periodic controller displays more variable behavior. Overall, both control schemes are efficient, but the classical version emerges as the most robust, consolidating solid criteria for the selection of control strategies in applications requiring precision and reliability

Keywords: Lyapunov, mobile, robot, trajectory



Introducción

La robótica móvil autónoma ha experimentado un crecimiento sostenido desde 2020, con proyecciones que estiman tasas anuales del 27,62% hasta 2030 (Data bridge, 2023; y Mordor Intelligence, 2026), lo que refleja su creciente importancia en aplicaciones industriales y de servicio. La diversificación de estos sistemas en sectores como manipulación de materiales, logística hospitalaria y agricultura de precisión ha planteado desafíos significativos en términos de control de movimiento, particularmente en el seguimiento preciso de trayectorias. Los robots móviles autónomos integran conocimientos de ingeniería mecánica, electrónica, teoría de control y ciencias de la computación para abordar problemas complejos de percepción sensoria, planificación de rutas y toma de decisiones en entornos dinámicos (Shin et al., 2025; Yu, 2024). Ante esta expansión tecnológica, el controlador basado en funciones de Lyapunov constituye a una propuesta de solución para el seguimiento de trayectorias en robots móviles, permitiendo establecer condiciones de estabilidad y convergencia del sistema cuando el robot opera en ambientes impredecibles (Shin et al., 2025). A pesar de los avances alcanzados en la robótica móvil, persisten desafíos significativos asociados a su aplicación en entornos reales de operación. En escenarios dinámicos como plantas industriales, espacios logísticos o áreas agrícolas, los robots autónomos deben desplazarse sobre superficies irregulares, sortear obstáculos móviles y responder a variaciones imprevistas del entorno, todo ello en condiciones de operación en tiempo real. Bajo este contexto, uno de los retos centrales para el desarrollo de prototipos de robótica móvil radica en la capacidad de seguir trayectorias previamente definidas de forma precisa y estable, ya que cualquier desviación puede afectar la eficiencia, seguridad y confiabilidad del sistema durante su funcionamiento (Trakas et al., 2024). Dicha problemática resulta más compleja en robots con configuración de ruedas, debido a que sus particularidades mecánicas restringen el desempeño de las arquitecturas de control clásicas (Martins & Bertol, 2022). Ante esta problemática la comunidad científica ha explorado diversas estrategias de control, entre las cuales el enfoque basado en la teoría de Lyapunov ha ganado relevancia por su rigor matemático para garantizar estabilidad en sistemas dinámicos. Este marco teórico permite formular funciones que cuantifican el desempeño del sistema respecto a su estado deseado, derivando leyes de control que aseguran una convergencia progresiva del error de seguimiento.

En Satoh (2024) se abordó el desarrollo de un esquema de control para sistemas no lineales con restricciones convexas en las señales de control, combinando funciones de Lyapunov de seguimiento con optimización convexa. Mediante simulaciones en robots móviles con ruedas, demostró que el controlador mantiene la estabilidad del sistema y reduce los errores de seguimiento respetando las limitaciones físicas de los actuadores.

Este enfoque destaca por considerar explícitamente las restricciones reales del hardware y mostrar un mejor desempeño y mayor precisión frente a métodos convencionales.

En un enfoque complementario Rodríguez-Angeles & Juárez-Lora (2023) destacan la importancia de trasladar los métodos de control basados en Lyapunov del ámbito teórico a aplicaciones experimentales y educativas. Su estudio identifica como principal desafío la implementación de estos controladores en plataformas robóticas diferenciales de bajo costo y fácil acceso, favoreciendo su uso tanto en investigación aplicada como en la formación académica. Mediante pruebas en entornos controlados, demostraron que estos robots pueden emplearse eficazmente para validar conceptos teóricos en condiciones reales, contribuyendo a reducir la brecha entre simulación y experimentación física.

En la investigación de Escobedo et al. (2024) se realizó una evaluación comparativa de distintos algoritmos de control para robots móviles en entornos ruidosos, donde el control predictivo basado en modelo y el control de Lyapunov demostraron mayor capacidad para manejar perturbaciones externas que métodos tradicionales como el PID. Utilizando trayectorias circulares y el error cuadrático medio como métrica de desempeño, los resultados evidenciaron que el enfoque basado en Lyapunov ofrece una respuesta más estable y confiable bajo condiciones de incertidumbre. En este contexto, la presente investigación propone una metodología que combina simulaciones y experimentos prácticos para el ajuste de parámetros del controlador y la evaluación del seguimiento de trayectorias. Además, se desarrolló una interfaz gráfica que facilita la visualización y comparación de dos estrategias de control derivadas del mismo marco teórico, aportando tanto a la validación del esquema propuesto como a su aplicación educativa y experimental.

18

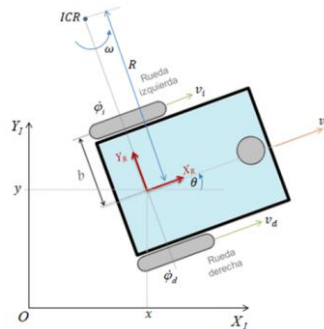
Metodología

Descripción y cinemática del robot móvil con ruedas

Para llevar a cabo las pruebas experimentales del algoritmo diseñado para el seguimiento de trayectorias, se seleccionó el robot mbot Neo mostrado en la Figura 1, utilizado en el ámbito educativo gracias a su flexibilidad y facilidad de uso. Este robot, desarrollado por la empresa MakeBlock, ofrece una plataforma completa que incluye sensores, actuadores y un entorno de programación intuitivo basado en Scratch y Python, lo que permite implementar y validar estrategias de control sin necesidad de equipos especializados (Makeblock Education, 2022).

Figura 1*Robot diferencial mBot Neo**Nota.* Makeblock Education (2022)

El mBot Neo posee una configuración diferencial, es decir, cuenta con dos ruedas motrices independientes, cada una accionada por un motor de corriente continua equipado con encoder, lo que permite un control preciso de su velocidad y posición, además, incorpora una rueda libre de apoyo que proporciona estabilidad estructural al conjunto. Los parámetros geométricos críticos para el modelado cinemático incluyen el radio de las ruedas que es de 3.2 cm y la distancia entre las ruedas motrices que corresponde a 6.5 cm, estos parámetros junto con la estructura general del robot, se ilustran de manera detallada en la Figura 2, permitiendo visualizar las relaciones geométricas y cinemáticas esenciales para el análisis del movimiento. La combinación de su arquitectura accesible y sus características técnicas hacen del mBot Neo una plataforma ideal para implementar y evaluar algoritmos de control en contextos académicos, y experimentales (Naema Atiyah Rafai et al., 2022).

Figura 2*Representación geométrica del robot móvil mBot Neo**Nota.* Figueroa et al, (2023)

Las velocidades lineales de las ruedas se determinan a partir de la siguiente ecuación:

$$v_d = \omega(R + b) \quad v_i = \omega(R - b) \quad (1)$$

Donde v_d y v_i representan las velocidades lineales de las ruedas, ω es la velocidad angular del robot alrededor de su centro de curvatura y R es el radio de la curvatura de la trayectoria descrita y b corresponde a la mitad de la distancia entre las ruedas (Leem et al., 2024). A partir de la Ec. 1 se logra despejar y se expresa tanto la velocidad angular ω como el radio de la curvatura R en función de las velocidades lineales de las ruedas.

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{2b} \quad R = \frac{b(v_d + v_i)}{v_d - v_i} \quad (2)$$

Posteriormente la velocidad tangencial del robot se expresa como v se calcula mediante el producto de la velocidad angular y el radio de la curvatura $v = \omega R$ sustituyendo ω y R esta velocidad se simplifica algebraicamente hasta obtenerse como el promedio de las velocidades lineales de ambas ruedas.

$$v = \omega R = \frac{v_d + v_i}{2} \quad (3)$$

Las velocidades tangenciales de las ruedas, denotadas como v_i para la rueda izquierda y v_d para la rueda derecha, se calculan a partir de las velocidades angulares de rotación de cada rueda alrededor de sus respectivos ejes, se expresan como $v_i = r\dot{\phi}_i$ y $v_d = r\dot{\phi}_d$ donde r es el radio de las ruedas y donde $\dot{\phi}_i$ y $\dot{\phi}_d$ son las velocidades angulares izquierda y derecha de las ruedas, respectivamente (Lee & Oh, 2021). Sustituyendo estas equivalencias en las Ecs. 2 y 3 que definen la velocidad angular ω y la velocidad tangencial v del robot, se obtienen las siguientes expresiones:

$$v = \frac{r\dot{\phi}_d + r\dot{\phi}_i}{2} = \frac{r}{2}\dot{\phi}_d + \frac{r}{2}\dot{\phi}_i \quad (4)$$

$$\omega = \frac{r\dot{\phi}_d - r\dot{\phi}_i}{2b} = \frac{r}{2b}\dot{\phi}_d - \frac{r}{2b}\dot{\phi}_i \quad (5)$$

Las Ecs. 4 y 5 representan la cinemática directa del robot en coordenadas locales, donde describen el movimiento (velocidad lineal, y angular) en función de las velocidades de sus ruedas. La cinemática directa en el sistema inercial o global quedaría como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos\theta & \dot{y} &= v \sin\theta & \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{x} &= \frac{r}{2}(\dot{\phi}_d \cos\theta + \dot{\phi}_i \cos\theta)\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{r}{2}(\dot{\phi}_d \sin\theta + \dot{\phi}_i \sin\theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{r}{2b}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_i)\end{aligned}\quad (7)$$

La estimación computacional de la postura relativa (posición y orientación) de un robot móvil en un instante t se obtienen integrando numéricamente su modelo cinemático respecto al sistema de referencia global (García Canet, 2024). Este procedimiento, conocido como odometría permite reconstruir la trayectoria del robot a partir de las velocidades de sus ruedas, aunque con un error acumulativo inherente. Si se consideran las velocidades como constantes v y ω durante el tiempo de muestreo, la integración de las ecuaciones anteriores se puede representar como:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s \cos(\theta(k)) \\ y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s \sin(\theta(k)) \\ \theta(k+1) &= \theta(k) + \omega(k)T_s\end{aligned}\quad (8)$$

21

El modelo del tiempo discreto para la cinemática del robot se define mediante Ec. 8, las cuales permiten calcular iterativamente su postura en cada instante de muestreo. Para ello, se asume que se conocen previamente la posición inicial $(x(0), y(0))$ y la orientación $\theta(0)$ inicial del robot, así como el perfil de las velocidades (las velocidades de los motores desde el instante inicial al instante actual). La elección de intervalo de muestreo T_s es crítica y debe ser lo suficientemente pequeño para capturar adecuadamente la dinámica del sistema continuo (Figueroa Olmedo et al., 2023).

Diseño de control basado en el método de estabilidad de Lyapunov

Debido a que el modelo de error del robot de la Ec. 14 es inherentemente no lineal, aplicar un controlador no lineal sería adecuado puesto que toma en cuenta todas las propiedades del sistema original durante el diseño del control (Chiem, 2025). Dentro de los sistemas no lineales un método que se ha generalizado es el de estabilidad en el sentido de Lyapunov, la cual permite analizar la estabilidad de un sistema de control y también puede ser aplicada como una estrategia para el diseño de controladores. En nuestro caso, se analizará la estabilidad asintótica del modelo de error en presencia de diferentes leyes de control.

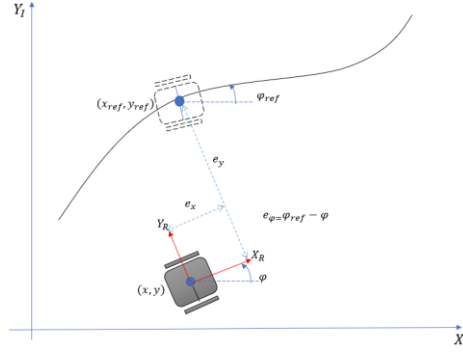
Modelo de error cinemático de seguimiento de trayectoria

Para resolver el problema de control, la postura del error no se da en el sistema de coordenadas global, sino más bien como un error en el sistema de coordenadas local del robot.

Este error se expresa como la desviación entre un robot de referencia virtual y el robot real como se muestra en la Figura 3, donde los errores obtenidos son: e_x que proporciona el error en la dirección de conducción, e_y que proporciona el error en la dirección perpendicular, y e_φ que proporciona el error en la orientación (Zhang et al., 2024).

Figura 3

La ilustración del error de postura en coordenadas locales



Nota. Autores, (2026)

22

El error de postura $e(t) = [e_x(t), e_y(t), e_\varphi(t)]^T$ se determina utilizando la postura real $q(t) = [x(t), y(t), \varphi(t)]^T$ del robot real y la postura de referencia $q_{ref}(t) = [x_{ref}(t), y_{ref}(t), \varphi_{ref}(t)]^T$ del robot virtual:

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_\varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) & \sin(\varphi(t)) & 0 \\ -\sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (q_{ref}(t) - q(t)) \quad (9)$$

Asumiendo que el robot real y el robot de referencia virtual tienen el mismo modelo cinemático dado por la Ec. 6 y tomando en cuenta la transformación de la Ec. 9, el modelo de error de postura puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos e_\varphi & 0 \\ \sin e_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u \quad (10)$$

donde v_{ref} y ω_{ref} son las velocidades de referencia lineal y angular dadas por (Castro Romero et al., 2024):

$$v_{ref}(t) = \sqrt{\dot{x}_{ref}^2(t) + \dot{y}_{ref}^2(t)} \quad (11)$$

$$\omega_{\text{ref}}(t) = \frac{\dot{x}_{\text{ref}}(t)\ddot{y}_{\text{ref}}(t) - \dot{y}_{\text{ref}}(t)\ddot{x}_{\text{ref}}(t)}{\dot{x}_{\text{ref}}^2(t) + \dot{y}_{\text{ref}}^2(t)} \quad (12)$$

Las Ecs. 11 y 12 proporcionan controles en lazo abierto que aseguran que el robot se conduzca a lo largo de la trayectoria de referencia en el caso ideal donde el modelo cinemático del robot describe exactamente el movimiento, y no hay perturbaciones, errores de medición, ni error de postura inicial (Castro Romero et al., 2024).

La entrada $\mathbf{u} = [v, \omega]^T$ debe ser comandada por el controlador y muy a menudo se descompone como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\text{ref}} \cos e_{\varphi} + v_{\text{fb}} \\ \omega_{\text{ref}} + \omega_{\text{fb}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde v_{fb} y ω_{fb} son las señales de realimentación que se definirán más adelante mediante en concepto de la estabilidad de Lyapunov, mientras que $v_{\text{ref}} \cos e_{\varphi}$ y ω_{ref} son las señales de prealimentación, aunque técnicamente hablando, $v_{\text{ref}} \cos e_{\varphi}$ está modulada con el error de orientación que se origina desde la salida. Por otro lado, cuando el error de orientación se lleva a 0, $v_{\text{ref}} \cos e_{\varphi}$ se convierte en una "verdadera" prealimentación. Insertando el control de la Ec. 13 en la Ec. 10 resulta en el modelo de error de seguimiento:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \omega_{\text{ref}} e_y - v_{\text{fb}} + e_y \omega_{\text{fb}} \\ \dot{e}_y &= -\omega_{\text{ref}} e_x + v_{\text{ref}} \sin e_{\varphi} - e_x \omega_{\text{fb}} \\ \dot{e}_{\varphi} &= -\omega_{\text{fb}} \end{aligned} \quad (14)$$

El objetivo de control es llevar los errores del modelo de error de la Ec. 14 hacia 0 mediante la elección apropiada de los controles v_{fb} y ω_{fb} .

Control en el marco de estabilidad de Lyapunov

El segundo método de Lyapunov proporciona condiciones suficientes para la estabilidad (asintótica) de puntos de equilibrio de un sistema dinámico no lineal dado por $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Primero, se asume que el equilibrio se encuentra en $x = 0$. El enfoque se basa en funciones escalares definidas positivas $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente: $V(x) = 0$ si $x = 0$, y $V(x) > 0$ si $x \neq 0$. La estabilidad del punto de equilibrio se analiza verificando la derivada de la función V (Hoang et al., 2022). Es muy importante que la derivada se obtenga a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial del sistema:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (15)$$

A continuación, se explica cómo el teorema de estabilidad de Lyapunov puede ser usado para propósitos de diseño de control (Farzan et al., 2022). El sistema no lineal del robot móvil de la Ec. 4 tiene tres estados con puntos de equilibrio en $e = 0$. El propósito es diseñar un control que haga a este punto estable y si es posible asintóticamente estable, lo que significa que todas las trayectorias eventualmente convergerían a la trayectoria de referencia y permanecerían allí para siempre (Grandia et al., 2020). La función candidata de Lyapunov más obvia es una suma de tres errores al cuadrado:

$$V(e) = \frac{k_y}{2} (e_x^2 + e_y^2) + \frac{1}{2} e_\varphi^2 \quad (16)$$

la cual puede interpretarse como una suma ponderada del error al cuadrado en distancia y el error al cuadrado en orientación. Una constante positiva k_y debe agregarse debido a las diferentes unidades, pero más adelante se mostrará que esta constante juega un papel importante en el diseño de la ley de control. La derivada temporal de V es:

$$\dot{V} = k_y e_x \dot{e}_x + k_y e_y \dot{e}_y + e_\varphi \dot{e}_\varphi \quad (17)$$

pero esta derivada debe evaluarse a lo largo de las soluciones de la Ec. 14, lo que significa que las derivadas de error deben introducirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_y e_x (\omega_{\text{ref}} e_y - v_{\text{fb}} + e_y \omega_{\text{fb}}) + k_y e_y (-\omega_{\text{ref}} e_x + v_{\text{ref}} \sin e_\varphi - e_x \omega_{\text{fb}}) + e_\varphi (-\omega_{\text{fb}}) \\ V &= -k_y e_x v_{\text{fb}} + k_y v_{\text{ref}} e_y \sin e_\varphi - e_\varphi \omega_{\text{fb}} \end{aligned} \quad (18)$$

La idea del diseño de control basado en Lyapunov es hacer la derivada de la función de Lyapunov negativa eligiendo las leyes de control apropiadamente. Por lo tanto, es obvio cómo el control podría construirse en este caso (Zhang et al., 2024). La velocidad lineal v_{fb} hará negativo al primer término del lado derecho en la Ec. 18 (completándolo al cuadrado negativo), mientras que la velocidad angular ω_{fb} cancelará el segundo término en la Ec. 18 y hará al tercero al término negativo (completándolo al cuadrado negativo). La ley de control que logra esto es:

$$\begin{aligned} v_{\text{fb}} &= k_x e_x \\ \omega_{\text{fb}} &= k_y v_{\text{ref}} \frac{\sin e_\varphi}{e_\varphi} e_y + k_\varphi e_\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Esta ley de control es una ley conocida y bien establecida. Ahora introduciendo el control propuesto en la Ec. 19, $\dot{V}$ se convierte en:

$$\dot{V} = -k_x k_y e_x^2 - k_\varphi e_\varphi^2 \quad (20)$$

Las ganancias de control son positivas, y más adelante se mostrará que k_x y k_φ pueden ser funciones positivas arbitrarias, uniformemente continuas, mientras que k_y se requiere que sea una constante positiva. La derivada de la función de Lyapunov es claramente no positiva, pero dado que se evalúa a cero en $e_x = 0$, $e_\varphi = 0$, independientemente de e_y , la derivada es semidefinida negativa, y el equilibrio es estable (Pan et al., 2024). Este resultado significa que el error permanecerá acotado, pero su convergencia a 0 no ha sido probada (Heredia Moreno et al., 2020).

Control periódico de Lyapunov

La naturaleza periódica también debe ser reflejada en la ley de control utilizada para el seguimiento. Esto debería significar que se busca una ley de control que sea periódica respecto al error en la orientación e_φ (el período es 2π) y asegura la convergencia del error de postura e a uno de los puntos $[0 \ 0 \ 2k\pi]^T$ donde $(k \in \mathbb{Z})$. Así, todos los problemas inusuales con el mapeo de la orientación para el intervalo $(-\pi, \pi]$ son aplacados, Estos problemas pueden volverse críticos alrededor de ± 180 grados en ciertas aplicaciones, por ejemplo, cuando se utiliza un observador para estimar la postura del robot a partir de las mediciones retrasadas (B et al., 2024; Grisales Ramírez, 2023). El objetivo es llevar el error de posición a cero, mientras el error de orientación debe converger a cualquier múltiplo de 2π . Para hacer esto, se utilizará una función de Lyapunov que es periódica con respecto a e_φ (con un período natural de 2π). Primero, se mostrará el concepto utilizando una función de Lyapunov, y luego se extenderá a un caso más general. La primera función candidata de Lyapunov se elige como

$$v = \frac{k_y}{2} (e_x^2 + e_y^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tan \frac{e_\varphi}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (21)$$

donde k_y es una constante positiva. Su derivada a lo largo de las soluciones de la Ec. 14 es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= k_y e_x (\omega_{ref} e_y - v_{fb} + e_y \omega_{fb}) + k_y e_y (-\omega_{ref} e_x + v_{ref} \sin e_\varphi - e_x \omega_{fb}) - 2 \frac{\tan \frac{e_\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{e_\varphi}{2}} \omega_{fb} \\ V &= -k_y e_x v_{fb} + k_y v_{ref} e_y \sin e_\varphi - 2 \frac{\tan \frac{e_\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{e_\varphi}{2}} \omega_{fb} \end{aligned} \quad (22)$$

Si se aplica la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} v_{fb} &= k_x e_x \\ \omega_{fb} &= k_y v_{ref} e_y \cos^4 \frac{e_\varphi}{2} + k_\varphi \sin e_\varphi \end{aligned} \quad (23)$$

donde k_x y k_φ son funciones acotadas positivas, la derivada $\dot{V}$ de la Ec. 22 se convierte en

$$\dot{V} = -k_x k_y e_x^2 - k_\varphi \left(\frac{\tan \frac{e_\varphi}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (24)$$

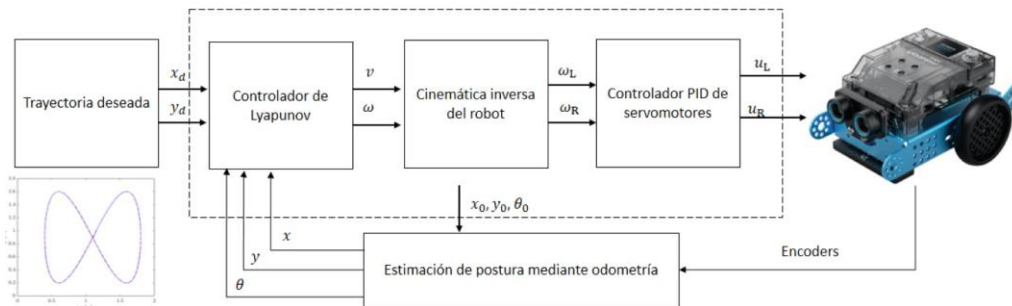
Siguiendo la misma línea que en el análisis de la ley de control (Ec. 19) se puede fácilmente concluir que e_x y $\tan \frac{e_\varphi}{2}$ convergen a 0 (esto significa que $e_\varphi \rightarrow 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) en el caso de ganancias de control acotadas y una trayectoria acotada. La convergencia de e_y a 0 también se puede concluir después de un análisis extenso si se cumplen las mismas condiciones que en el caso de la ley de control (Ec. 19) (Samaniego López, 2023).

Diseño del controlador de Lyapunov para el seguimiento de trayectoria

Para la implementación y verificación de la funcionalidad del algoritmo de control de Lyapunov en el seguimiento de trayectorias se utilizó el robot diferencial mBot Neo. El diagrama de bloques de la Figura 4, describe la arquitectura del sistema de control completo que permite al robot mBot Neo seguir las trayectorias parametrizadas mediante un algoritmo que está basado en el teorema de Lyapunov. Este bucle cerrado permite correcciones continuas, manteniendo al robot en la trayectoria deseada con precisión y estabilidad, incluso ante imperfecciones sensoriales o limitaciones de los actuadores.

Figura 4

Diagrama de bloques de la arquitectura completa del sistema de control de Lyapunov



Nota. Autores, (2026)

El proceso inicia con la definición de la trayectoria deseada expresada mediante un conjunto de puntos (x_d, y_d) , los cuales se comparan constantemente con la posición actual del robot (x, y) estimada mediante odometría. El controlador de Lyapunov determina y procesa los errores de posición y orientación, generando las señales de velocidad lineal v y angular ω necesarias para minimizar dichos errores.

Estas señales de velocidad se transforman en referencias específicas para cada rueda (ω_L, ω_R) mediante la cinemática inversa, considerando parámetros físicos y geométricos como el radio de las ruedas y la distancia entre ellas. Los controladores PID se encargan de regular las señales individuales (u_L, u_R) enviadas a cada motor, asegurando que las ruedas alcancen las velocidades deseadas a pesar de las perturbaciones externas o de las variaciones dinámicas. El movimiento resultante es monitoreado por medio de los encoders acoplados a los motores de las ruedas, cuyas lecturas se realimentan al sistema de odometría para actualizar la estimación de la postura actual del robot.

Métricas de evaluación

El rendimiento del sistema de seguimiento se evaluó mediante cuatro métricas de error fundamentales: error medio (ME), error medio absoluto (MAE), error cuadrático medio (MSE) y raíz del error cuadrático medio (RMSE), las cuales permiten una valoración integral del desempeño del controlador. Todas las métricas se basan en el error absoluto e_i calculado mediante la ecuación (Ec. 25), definido como la distancia entre la posición teórica generada por el algoritmo $(x_{t_i} - x_{r_i})$ y la posición real del robot $(y_{t_i} - y_{r_i})$ en cada instante i (Fidel et al., 2024).

$$e_i(t) = \sqrt{(x_{t_i} - x_{r_i})^2 + (y_{t_i} - y_{r_i})^2} \quad (25)$$

El error medio (ME) determina el valor promedio de todos los desvíos de posición registrados a lo largo de la ruta, reflejando la estabilidad constante del sistema y señalando si presenta una propensión a exceder o subestimar consistentemente la trayectoria ideal.

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i \quad (26)$$

donde N representa el número total de puntos muestreados a lo largo de la trayectoria. El error medio absoluto (MAE) cuantifica la magnitud promedio de los errores al promediar sus valores absolutos, lo que elimina la compensación entre desviaciones positivas y negativas. Esto proporciona una evaluación más confiable del desempeño general del sistema de control, al reflejar directamente el tamaño promedio de los errores sin distinción de dirección (Fidel et al., 2024).

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i| \quad (27)$$

Por otro lado, el error cuadrático medio (MSE) se calcula promediando los cuadrados de los errores lo que intensifica la penalización de las desviaciones grandes. Esta característica lo hace particularmente sensible a desviaciones significativas de la trayectoria deseada, permitiendo detectar eficazmente comportamientos con picos de error en el controlador.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (28)$$

La raíz del error cuadrático medio (RMSE) se deriva de calcular la raíz cuadrada del MSE, conservando su propiedad de penalizar severamente los errores grandes, pero presentando el resultado en las mismas unidades de la variable original. Esta métrica combina la sensibilidad a desviaciones significativas del MSE con la interpretabilidad práctica del MAE proporcionando así una evaluación completa del desempeño del sistema de seguimiento (Fidel et al., 2024).

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (29)$$

Estas cuatro métricas complementarias permiten analizar distintos aspectos del comportamiento del controlador, el ME evalúa la tendencia sistemática, el MAE cuantifica la magnitud promedio del error, el MSE penaliza con mayor severidad los errores grandes al considerar el cuadrado de las desviaciones y el RMSE ofrece una medida equilibrada del rendimiento global.

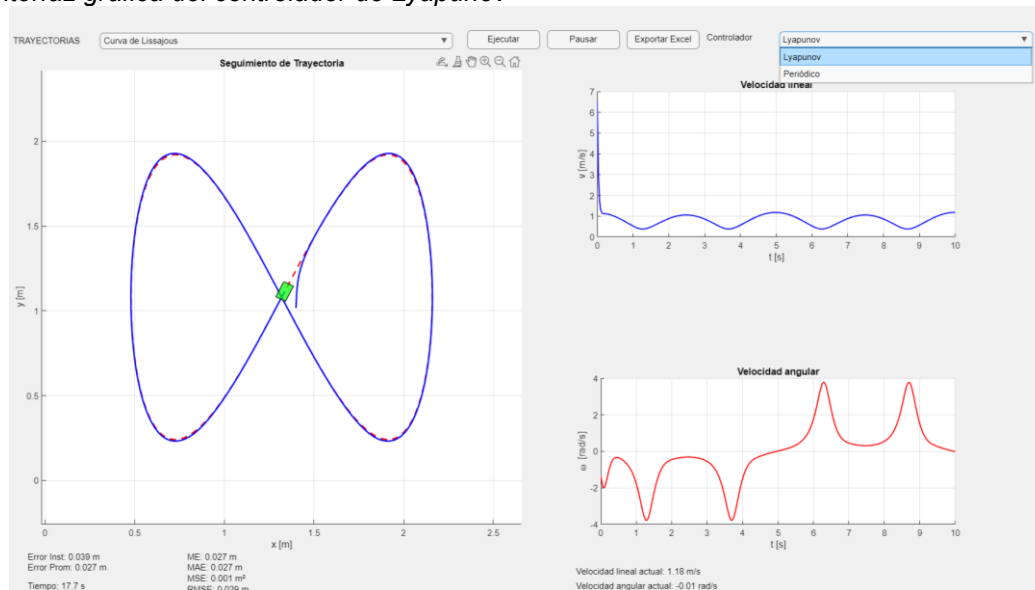
Resultados

El desarrollo del controlador para el seguimiento de trayectorias, fundamentado en la teoría de estabilidad de Lyapunov y diseñado para la cinemática de un robot diferencial, se implementó inicialmente en Matlab para validar su desempeño mediante simulaciones numéricas. Posteriormente este modelo matemático se transcribió y adaptó al lenguaje Python dentro del entorno de programación de mBlock, asegurando la compatibilidad con el hardware del robot móvil mBot Neo. Tras optimizar el código para interactuar con el hardware del robot, este se descargó sobre el microcontrolador de este, permitiendo finalmente ejecutar y evaluar el sistema de control en escenarios reales, donde se verificó su eficiencia.

Para verificar el funcionamiento del algoritmo de control en el seguimiento de trayectorias, se ejecutaron pruebas utilizando cinco trayectorias distintas (elíptica, circular, Lissajous, cardioide y curva de Lissajous) y diseñadas a partir de ecuaciones de formas geométricas reconocidas. La interfaz gráfica desarrollada (Figura 5) permite simular y evaluar el comportamiento de dos versiones del algoritmo de control de Lyapunov aplicadas al seguimiento de trayectorias.

Figura 5

Interfaz gráfica del controlador de Lyapunov



Nota. Autores, (2026)

En la parte superior izquierda de la Figura 5 se encuentra un menú desplegable que ofrece la selección de las cinco trayectorias de referencia, mientras que en el centro superior se ubican los botones de control que permiten ejecutar, pausar la simulación o exportar los resultados numéricos a un archivo excel para su posterior análisis. En el extremo superior derecho se dispone de un selector de controlador que brinda la posibilidad de elegir entre las dos variantes implementadas, denominadas Lyapunov y Periódico.

La sección central izquierda está dominada por la gráfica principal de seguimiento de trayectoria, en la cual se representan la trayectoria de referencia mediante una línea discontinua roja, la trayectoria seguida por el robot con una línea continua azul y la posición actual del robot indicada con un marcador en forma de rombo verde acompañado de flechas que señalan su orientación. En el costado derecho se incluyen dos gráficos adicionales que describen la evolución temporal de las velocidades del robot, el primero corresponde a la velocidad lineal expresada en metros por segundo y el segundo a la velocidad angular en radianes por segundo.

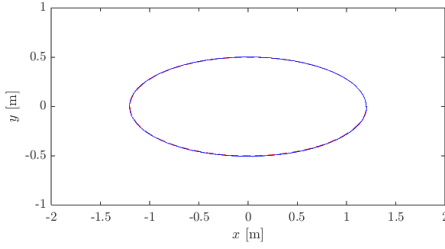
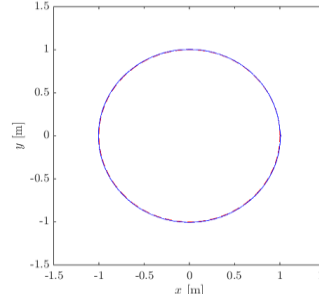
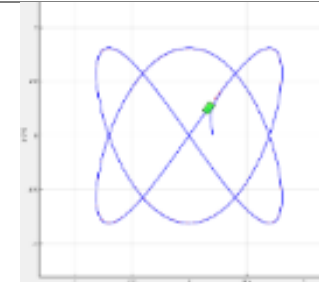
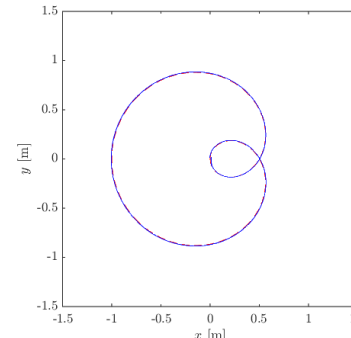
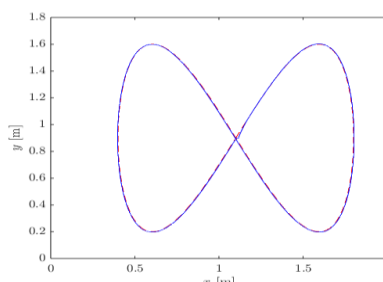
Finalmente, en la parte inferior de la interfaz se muestran indicadores numéricos que complementan la simulación: a la izquierda se presentan las métricas de error (ME, MAE, MSE y RMSE), junto con el tiempo de simulación, mientras que en la parte inferior derecha se indican los valores actuales de velocidad lineal y angular, lo cual permite tener una visión integral del desempeño del sistema de control en tiempo real.

Las ecuaciones que definen la dinámica de las cinco trayectorias evaluadas se presentan en la Tabla 1. En esta misma tabla se incluyen las representaciones gráficas de los resultados del seguimiento, donde de manera visual se observan directamente las desviaciones entre el comportamiento esperado y el desempeño real del sistema de control en cada prueba realizada. En la Tabla 2 y Tabla 3 se muestran los valores calculados de las diferentes métricas mencionadas en la sección 2.4, una vez realizadas las simulaciones de seguimiento de las diferentes trayectorias mediante las dos versiones del algoritmo de control de Lyapunov.

Como se observa en la Tabla 2, el menor valor del error cuadrático medio (MSE) se obtiene en la trayectoria Lissajous con 0.00031 m^2 , lo que indica el mejor desempeño del controlador en términos de penalización de errores grandes. En contraste, la trayectoria cardioide presenta un MSE de 0.00051 m^2 , manteniéndose dentro de un rango bajo y estable. El mayor MSE corresponde a la curva de Lissajous con 0.00081 m^2 , asociado a su mayor complejidad geométrica. Estos resultados evidencian que el control basado en Lyapunov mantiene un desempeño consistente, con errores reducidos incluso en trayectorias más exigentes, confirmando la robustez del esquema de control.

Tabla 2

Ecuaciones y resultados obtenidos de las cinco trayectorias de prueba

Trayectorias de Prueba		
Trayectorias	Ecuaciones	Resultados
Elíptica	x_{r_i} $= 1.2 \cos(ft_i)$ y_{r_i} $= 0.5 \cos(ft_i)$	
Circular	x_{r_i} $= 1.0 \cos(ft_i)$ y_{r_i} $= 1.0 \cos(ft_i)$	
Lissajous	x_{r_i} $= 1.2 \sin(2ft_i)$ y_{r_i} $= 1.2 \sin(3ft_i)$	
Cardioides	x_{r_i} $= 0.5(\cos(ft_i)$ $- \cos(2ft_i))$ y_{r_i} $= 0.5(\sin(ft_i)$ $- \sin(2ft_i))$	
Curva de Lissajous	x_{r_i} $= 1.1$ $+ 0.7 \sin(ft_i)$ y_{r_i} $= 0.9$ $+ 0.7 \sin(2ft_i)$	

Nota. Autores, (2026)

Tabla 2

Error del diseño de control en el marco de estabilidad de Lyapunov

Errores	Elíptica	Circular	Lissajous	Cardioides	Curva de Lissajous
ME (m)	0,00910	0,01142	0,00873	0,01005	0,02681
MAE (m)	0,00910	0,01142	0,00873	0,01005	0,02681
MSE (m²)	0,00025	0,00075	0,00031	0,00051	0,00081
RMSE (m)	0,01585	0,02755	0,01783	0,02260	0,02862

Nota. Autores, (2026)

Tabla 3

Errores del diseño de ley de control periódico

Errores	Elíptica	Circular	Lissajous	Cardioides	Curva de Lissajous
ME (m)	0,00913	0,01162	0,00883	0,00945	0,02683
MAE (m)	0,00913	0,01162	0,00883	0,00945	0,02683
MSE (m²)	0,00025	0,00078	0,00033	0,00047	0,00082
RMSE (m)	0,01592	0,02797	0,01821	0,02176	0,02864

Nota. Autores, (2026)

Según la Tabla 3, el control periódico alcanza su menor MSE en la trayectoria Lissajous (0.00033 m²), indicando mejor desempeño frente a errores elevados, mientras que la trayectoria cardioide mantiene un MSE bajo de 0.00047 m², evidenciando seguimiento estable. El mayor MSE se presenta en la curva de Lissajous (0.00082 m²), asociado a su mayor complejidad geométrica. Los valores de RMSE se mantienen cercanos entre trayectorias, confirmando consistencia del controlador. La Tabla 4 muestra los resultados por trayectoria y permite analizar cómo la geometría influye en el desempeño de los controladores.

Tabla 4

Pruebas de tiempo del diseño del controlador de Lyapunov

Trayectorias	Control en el Marco de Estabilidad de Lyapunov		Ley de Control Periódico	
	Tiempo Simulado (seg)	Tiempo Real (seg)	Tiempo Simulado (seg)	Tiempo Real (seg)
Elíptica	29. 037	27.880	29.143	28.939
Circular	29. 365	32.021	29. 481	33.532
Lissajous	59. 073	55.034	59. 320	57.371
Cardioides	30. 162	30.711	30. 980	30. 720
Curva de Lissajous	29. 779	28.638	29. 888	28.986

Nota. Autores, (2026)

Según los resultados presentados en la Tabla 4, los tiempos reales de ejecución del controlador Lyapunov se mantienen muy cercanos a los tiempos simulados en todas las trayectorias, con diferencias reducidas que confirman la validez del modelo. La trayectoria Lissajous presenta los mayores tiempos de ejecución, tanto en simulación (59.073 s) como en la prueba real (55.034 s), debido a su mayor complejidad geométrica. En contraste, la trayectoria elíptica registra los menores tiempos reales, con 27.880 s. En general, las variaciones entre simulación y realidad se mantienen dentro de un margen reducido, lo que evidencia una adecuada capacidad de predicción temporal y un desempeño estable del controlador.

Discusión

Según la Tabla 2, el controlador basado en Lyapunov alcanza su mejor desempeño en la trayectoria Lissajous, con un MSE de 0.00031 m² y un RMSE de 0.01783 m, mientras que la trayectoria elíptica presenta un MSE de 0.00025 m². La trayectoria cardioide mantiene un MSE bajo de 0.00051 m², evidenciando un seguimiento estable. En contraste, la curva de Lissajous registra el mayor MSE de 0.00081 m² y un RMSE de 0.02862 m, debido a su mayor complejidad geométrica. De manera similar, la Tabla 3 muestra que la ley de control periódico alcanza su menor MSE en Lissajous (0.00033 m²) y mantiene valores reducidos en cardioide (0.00047 m²), mientras que la curva de Lissajous alcanza 0.00082 m². Los valores de RMSE oscilan entre 0.01592 m y 0.02864 m, reflejando comportamiento consistente. Según la Tabla 4, los tiempos reales del controlador Lyapunov son cercanos a los simulados, destacando Lissajous con 59.073 s en simulación y 55.034 s real, mientras que la elíptica registra 27.880 s. Estos resultados confirman que ambos controladores ofrecen desempeño estable y predecible, incluso ante trayectorias geométricamente complejas.

Al comparar estos resultados con la investigación (Castillo Otoya, 2023), en “Trayectoria de un Robot Móvil Omnidireccional en un Entorno Controlado”, su robot omnidireccional alcanza un error promedio de 0.00534 m en trayectoria lemniscata, 38 % inferior al mínimo de este estudio, mostrando mayor precisión en trayectorias suaves. Sin embargo, en la trayectoria cuadrada, los errores aumentan hasta 0.02551 m promedio y 0.04599 m máximo, superando los errores máximos del control Lyapunov, lo que evidencia sensibilidad a cambios geométricos abruptos. En contraste, Lyapunov mantiene consistencia, con variabilidad de solo 3.07 veces entre trayectorias. Esto indica que la arquitectura omnidireccional es más adecuada para trayectorias predeterminadas suaves en entornos controlados, mientras que Lyapunov ofrece mayor robustez y adaptabilidad ante trayectorias impredecibles o con cambios bruscos de dirección.

La comparación resalta la ventaja del Lyapunov en aplicaciones que requieren estabilidad frente a variaciones geométricas, mostrando que ambos enfoques tienen aplicaciones complementarias según la complejidad de la trayectoria.

En relación con la investigación de (Castro Romero, 2024), sobre “Control basado en observador de estados de segundo orden”, se reporta que en trayectoria lemniscata el error en x disminuye de 0.4 m a cerca de cero en 5 segundos, mientras que el error en y se mantiene en ± 0.01 m. En trayectoria circular, los errores iniciales en x de 0.08 m convergen a cero, con errores en y del orden de 10^{-3} m. La convergencia del observador es rápida, estabilizándose en 5-10 segundos, frente a los 55-60 segundos del control Lyapunov, representando aceleración de 5 a 11 veces. Este desempeño se debe a la realimentación completa del vector de estado estimado, permitiendo control más agresivo. Sin embargo, presenta oscilaciones y sobrepaso significativo, mientras que Lyapunov mantiene suavidad y sin sobrepaso. El error inicial del observador en x (0.4 m) frente a 0.009 m de Lyapunov indica que requiere tiempo para estabilizarse. Además, no garantiza estabilidad formal mediante función de Lyapunov, crítico para seguridad operacional. Estos resultados muestran que el observador es superior para respuesta rápida, mientras que Lyapunov es preferible donde se priorizan suavidad y robustez frente a incertidumbre del modelo.

Al contrastar con la investigación de (Morales Corral & Soto, 2020) implementan un *Controlador difuso adaptativo* evaluado solo en trayectoria circular, que se ajusta a variaciones del entorno, pero no garantiza estabilidad formal y depende de la sintonización de reglas. En contraste, el control Lyapunov asegura estabilidad asintótica y convergencia del error a cero frente a perturbaciones. Esta investigación valida seis trayectorias con métricas completas (ME, MAE, MSE, RMSE) y $\pm 5\%$ de correspondencia simulación-realidad. Lyapunov muestra mayor robustez y adaptabilidad ante cambios no anticipados, con variaciones entre trayectorias menores a 0.00003 m, evidenciando precisión y confiabilidad universales frente a la limitación del control difuso.

Por otra parte, el controlador propuesto por (Asencio Suarez, 2025), implementa un *Controlador por linealización de realimentación* exacta, con errores de 0.0056% en Curva Lissajous, 0.0076% Circular, 0.0062% Elíptica, 0.0063% Lissajous y 0.0391% en Senoide, con variabilidad de 5.1 veces. En trayectorias simples, estos errores superan a Lyapunov (0.00873 m $\approx$ 0.087%), pero la sensibilidad a cambios geométricos es 66% mayor, mostrando pérdida de efectividad en condiciones no ideales. La desviación estándar máxima de 0.0014% es comparable a la consistencia de Lyapunov (< 0.00003 m). En conclusión, la linealización es óptima para trayectorias simples, mientras que Lyapunov ofrece robustez global y estabilidad ante trayectorias complejas.

Finalmente (García Patiño, 2025), implementa *Particle Swarm Optimization (PSO)*, un algoritmo metaheurístico que optimiza parámetros de control simulando comportamiento colectivo de enjambre, evaluado en cinco trayectorias. Reporta errores de 0.7224% en Elíptica, 0.8025% en Circunferencia, 0.7738% en Lissajous, 0.7858% en Cardioides y 1.4931% en Senoide, con variabilidad de 2.07 veces (menor que los 3.07 de Lyapunov) y desviación estándar máxima de 0.0319%. Esta menor variabilidad indica que PSO adapta parámetros eficazmente a cada geometría, mejorando la generalización entre trayectorias frente a Lyapunov. Los errores en trayectorias simples muestran superioridad de PSO en optimización adaptativa (0.7224% vs 0.087%). Estos hallazgos sugieren que, aunque PSO ofrece adaptabilidad y precisión, Lyapunov es más robusto para sistemas autónomos, destacando la posibilidad de futuros enfoques híbridos que combinen estabilidad Lyapunov con optimización PSO.

Conclusiones

La implementación del controlador de Lyapunov en sus dos variantes demostró ser efectiva para el seguimiento de trayectorias tanto en entornos simulados como en pruebas reales con el robot mBot Neo. Los resultados obtenidos evidencian una correspondencia cercana entre los tiempos simulados y reales, lo que valida la robustez del modelo teórico y su adaptación al hardware. Este comportamiento confirma la viabilidad práctica del diseño y refuerza la importancia de la estabilidad garantizada por la teoría de Lyapunov en aplicaciones de control de robots diferenciales. Por otro lado, el análisis comparativo entre los errores muestra que el controlador basado en el marco clásico de Lyapunov mantiene un desempeño más estable y consistente frente a trayectorias de mayor complejidad geométrica, mientras que la variante periódica tiende a mostrar ligeras desviaciones en escenarios donde las condiciones dinámicas son más exigentes. Esta diferencia se refleja particularmente en trayectorias como la circular y las curvas de Lissajous, donde factores no modelados influyen con mayor fuerza en la ejecución real, generando tiempos y errores ligeramente superiores. Finalmente, los resultados resaltan que, si bien ambos enfoques son adecuados para el seguimiento de trayectorias, el controlador clásico destaca por su adaptabilidad y menor variabilidad, lo cual lo hace idóneo para aplicaciones que demandan alta precisión y estabilidad. En contraste, la ley de control periódica puede resultar ventajosa en trayectorias menos exigentes o en contextos donde se requiera cierta flexibilidad en la respuesta. De esta manera, la investigación aporta criterios claros para la selección del controlador según la complejidad de la trayectoria y el nivel de exactitud requerido, consolidando así una base sólida para futuras optimizaciones en el diseño de sistemas de control para robots móviles

Referencias

- Asencio Suarez, C. D. (2025). Desarrollo e implementación de un controlador para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil con ruedas basado en linealización de realimentación y variables de estado [Universidad Estatal Península de Santa Elena].
<https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/12841>
- B, A., Pandey, M., & Gajbhiye, S. (2024). *Finite-Time Trajectory Tracking of a Four wheeled Mecanum Mobile Robot*.
<http://arxiv.org/abs/2410.06762>
- Castillo Otoya, B. J. (2023). *Control de Trayectoria de un Robot Móvil Omnidireccional en un Entorno Controlado*. UNIVERSIDAD DEL AZUAY FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA ESCUELA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA.
- Castro Romero, L. A. (2024). *Control Para el Seguimiento de Trayectoria Basado en Observador de Estados, para un Robot Móvil Diferencial, utilizando un Modelo de Segundo Orden*. UNIVERSIDAD DEL PAPA LOAPAN CAMPUS LOMA BONITA.
- Castro Romero, L. A., García Lozano, H. N., Santiaguillo Salinas, J., & Pérez Castro, N. (2024). Control-observador para seguimiento en un robot diferencial de segundo orden. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías Del ICBI*, ISSN-e 2007-6363, Nº. Extra 12, 2024 (Ejemplar Dedicado a: Special 5 (December)), 7 Págs., 12(12), 1–7.
<https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial2.12072>
- Chiem, N. X. (2025). Cascade Control for Trajectory-Tracking Mobile Robots Based on Synergetic Control Theory and Lyapunov Functions. *Control Systems and Optimization Letters*, 3(1), 14–19.
<https://doi.org/10.59247/CSOL.V3i1.169>
- Data bridge. (2023, September 8). *Influencia y evolución de la robótica móvil en las industrias en desarrollo de automatización y eficiencia*.
<https://www.databridgemarketresearch.com/es/news/global-mobile-robotics-market>
- Escobedo, Á., Salas, V., Loyola, O., Sandoval, C., & Vidal, J.-C. (2024, August 30). Análisis comparativo de algoritmos de control para robots móviles bajo condiciones de ruido. *Revista Científica*, 50, 71–84.
<https://doi.org/10.14483/23448350.22613>
- Farzan, S., Azimi, V., Hu, A. P., & Rogers, J. (2022). Adaptive Control of Wire-Borne Underactuated Brachiating Robots Using Control Lyapunov and Barrier Functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 30(6), 2598–2614.
<https://doi.org/10.1109/TCST.2022.3160058>

- Fidel, M., Escobar, G., Alfonso, A., Lasserre, A., Argumedo Del Moral, M. J., Flores, N. H., & Figueroa, G. A. (2024). *Desarrollo de un modelo inteligente para predecir el precio marginal local (PML) en un nodo de la red eléctrica nacional*.
- Figueroa Olmedo, J. R., Montalvo López, W. M., & Bayas Sampedro, M. M. (2023). *Cinemática y Dinámica de Robots Móviles con Ruedas* (A. Poveda G, Ed.).
- García Canet, E. (2024). *Proyecto de diseño mecánico, control de posición y análisis cinemático de un prototipo de robot móvil diferencial para la resolución de retos en el concurso Eurobot*. Universitat Politècnica de València. <https://riunet.upv.es/handle/10251/208906>
- García Patiño, A. J. (2025). *Seguimiento de trayectoria de un robot móvil con ruedas basado en optimización de enjambre de partículas* [Universidad Estatal Península de Santa Elena]. <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/12641>
- Grandia, R., Taylor, A. J., Singletary, A., Hutter, M., & Ames, A. D. (2020). *Nonlinear Model Predictive Control of Robotic Systems with Control Lyapunov Functions*. <https://doi.org/10.15607/RSS.2020.XVI.098>
- Grisales Ramírez, E. (2023). *Planificación de trayectorias óptimas de robots móviles empleando el mapeo de celdas*. 1. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=329210&info=resumen&idioma=ENG>
- Heredia Moreno, I. F., Játiva Brito, E. M., & Macías Espinales, V. A. (2020). *Simulación del modelo matemático de un robot móvil diferencial con control de posición sin orientación basado en ley de Lyapunov*. 5(1), 880–899. <https://doi.org/10.23857/pc.v5i1.2022>
- Hoang, T. T., Thanh, V. C., Quan, N. N. A., & Le Thang Dong, T. (2022). Stabilization Controller Design for Differential Mobile Robot Using Lyapunov Function and Extended Kalman Filter. *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering, LNICST, 444 LNICST*, 201–213. https://doi.org/10.1007/978-3-031-08878-0_14
- Kubo, R., Fujii, Y., & Nakamura, H. (2020). Control Lyapunov function design for trajectory tracking problems of wheeled mobile robot. *IFAC-PapersOnLine*, 53, 6177–6182. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1704>
- Lee, S., & Oh, S. (2021). A study on test method for evaluation of mobile robot trajectory estimation. *International Conference on Control, Automation and Systems, 2021-October*, 1639–1642. <https://doi.org/10.23919/ICCAS52745.2021.9649766>

- Leem, J. G., Kim, D. J., Lee, M. H., Kim, S. J., & Suh, J. H. (2024). Robust Tracking Model Predictive Control Scheme for Application to Differential Mobile Robot for Trajectory Tracking. *International Conference on Control, Automation and Systems*, 947–949.
<https://doi.org/10.23919/ICCAS63016.2024.10773338>
- Makeblock Education. (2022). *Clases STEM para educación para todas las edades | hacer bloque*. <https://www.makeblock.com/collections/stem-classes>
- Martins, N. Almeida., & Bertol, D. Wildgrube. (2022). *Wheeled mobile robot control : theory, simulation, and experimentation* (4th ed.). Springer.
- Morales Corral, C., & Soto, I. (2020). Control difuso para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil Fuzzy Speed Controller for Trajectory Tracking on a Mobile Robot. *Research in Computing Science*, 71–83.
- Mordor Intelligence. (2026). *Tamaño del mercado de robots móviles, participación, tendencias*. <https://www.mordorintelligence.ar/industry-reports/global-mobile-robots-market>
- Naema Atiyah Rafai, A., Adzhar, N., Izzati Jaini, N., Pahang, M., & Persiaran Tun Khalil Yaakob, L. (2022). A Review on Path Planning and Obstacle Avoidance Algorithms for Autonomous Mobile Robots. *Journal of Robotics*, 2022(1), 2538220.
<https://doi.org/10.1155/2022/2538220>
- Rodríguez-Angeles, A., & Juárez-Lora, J. A. (2023). Control para navegación autónoma y formación de robots móviles diferenciales. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías Del ICBI*, 11, 78–85.
<https://doi.org/10.29057/icbi.v11iespecial2.10844>
- Samaniego López, R. (2023). *Planificación de trayectorias para robots no holonómicos en entornos con fuertes restricciones dimensionales*. 1. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=316688&info=resumen&idioma=SPA>
- Satoh, Y. (2024). Trajectory Tracking of Nonlinear Systems with Convex Input Constraints Based on Tracking Control Lyapunov Functions. *Applied Sciences (Switzerland)*, 14(11).
<https://doi.org/10.3390/app14114377>
- Shin, H., Kim, S., Jung, E., Han, Y., Lee, N., Park, S., Jeon, C., & Woo, J. (2025). A Comprehensive Review of Autonomous Mobile Robots in Healthcare: Implications for Patient-Transporting Human-Following Robots. *Robotics 2025, Vol. 14, Page 179*, 14(12), 179.
<https://doi.org/10.3390/ROBOTICS14120179>

- Tao, Z., Wang, Y. H., Li, G. Q., & Hou, G. (2023). Lyapunov based global trajectory tracking control of wheeled mobile robot. *Journal of Physics: Conference Series*, 2478(10).
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2478/10/102018>
- Trakas, P. S., Anogiatis, S. I., & Bechlioulis, C. P. (2024). Trajectory Tracking with Obstacle Avoidance for Nonholonomic Mobile Robots with Diamond-Shaped Velocity Constraints and Output Performance Specifications. *Sensors* 2024, Vol. 24, Page 4636, 24(14), 4636.
<https://doi.org/10.3390/S24144636>
- Yu, Q. (2024). A review of research about automatic navigation system of mobile robots based on ROS. *Applied and Computational Engineering*, 79(1), 248–254.
<https://doi.org/10.54254/2755-2721/79/20241666>
- Zhang, C., Jia, Z., Wang, H., Lin, Y., & Zhang, W. (2024). Trajectory Tracking for Wheeled Mobile Robot Using Lyapunov-Based Model Predictive Control. *Proceedings - 2024 China Automation Congress, CAC 2024*, 4240–4245.
<https://doi.org/10.1109/CAC63892.2024.10865350>